

PENYEDERHANAAN DENGAN KARNAUGH MAP

Karnaugh Map adalah pengganti persamaan aljabar boole.

Maksud penulisan variable pada peta (map) ini, agar dalam peta hanya ada satu variable yang berubah dari bentuk komplemen menjadi bentuk bukan komplemen.

Contoh :

- **2 Variabel** → **x, y**

	\bar{y}	y
X'	0	1
X	2	3

Atau

x \ y	\bar{y}	y
0	0 ⁰⁰	1 ⁰¹
1	2 ¹⁰	3 ¹¹

- **3 Variabel** → **A, B, C**

	B'C'	B'C	BC	BC'
A'	0	1	3	2
A	4	5	7	6

Atau

BC \ A	0	1	1	0
0	0 ⁰⁰⁰	1 ⁰⁰¹	3 ⁰¹¹	2 ⁰¹⁰
1	4 ¹⁰⁰	5 ¹⁰¹	7 ¹¹¹	6 ¹¹⁰

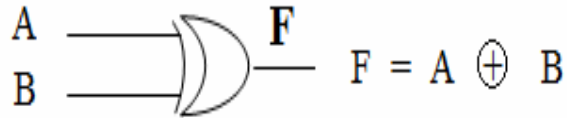
- **4 Variabel** → **A, B, C, D**

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	1	3	2
A'B	4	5	7	6
AB	12	13	15	14
AB'	8	9	11	10

Atau

CD \ AB	00	01	11	10
00	0000 0	0001 1	0011 3	0010 2
01	0100 4	0101 5	0111 7	0110 6
11	1100 12	1101 13	1111 15	1110 14
10	1000 8	1001 9	1011 11	1010 10

Misalnya : XOR Gate



A	B	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\begin{aligned} &\rightarrow A'B \\ &\rightarrow AB' \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &\rightarrow A'B \\ &\rightarrow AB' \end{aligned}} \right\} A'B + AB' = B \oplus A$$

$$F(A, B) = \Sigma(1, 2)$$

	B'	B
A'	0	1
A	1	0

Atau

	B	
A	0	1
0	0	1
1	1	0

CARA PENGELOMPOKAN NILAI VARIABEL (LITERAL)

1. PASANGAN (PAIRS)

Adalah suatu pasangan nilai angka 1 yang saling berdekatan dalam arah horizontal atau vertikal.

Jika dalam sebuah peta karnaugh terdapat lebih dari satu pasangan, kita dapat melakukan operasi OR pada hasil kali yang telah disederhanakan itu, untuk memperoleh persamaan boole ybs.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	1	1	0
AB	1	0	0	0
AB'	1	0	0	0

$$\begin{aligned} F &= A'BC'D + A'BCD + ABC'D' + AB'C'D' \\ &= A'BD(C' + C) + AC'D'(B + B') \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } F = A'BD + AC'D'$$

Atau

$$F = A'BC'D + A'BCD + ABC'D' + AB'C'D'$$

$$\text{Jadi } F = A'BD + AC'D'$$

2. KUAD (QUADS)

Adalah kelompok yang terdiri dari empat buah nilai angka 1 yang tersusun berdampingan dari ujung ke ujung.

"Bila kita menjumpai suatu susunan kuad, maka lingkarilah kelompok itu, karena hal ini dapat menyederhanakan bentuk hasil kali semula.

Dalam kenyataan, kehadiran sebuah kuad berarti terhapusnya dua variable beserta kokplemennya dari persamaan boole ybs".

Contoh :

► **Secara Horizontal :**

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
AB'	0	0	0	0

$$F = \cancel{ABC'D'} + \cancel{ABC'D} + \cancel{ABC'D'} + \cancel{ABCD'}$$

Jadi $F = AB$

Akan sama hasilnya dengan cara pairs (pasangan) harus dihindarkan:

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
AB'	0	0	0	0

$$F = \cancel{A'B'CD} + \cancel{A'BC'D} + \cancel{ABCD} + \cancel{ABCD'}$$

Jadi $F = ABC + ABC$

Persamaan di atas masih dapat disederhanakan menjadi :

$$F = AB (C' + C)$$

Jadi $F = AB$

► **Secara Vertikal :**

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	1	0
A'B	0	0	1	0
AB	0	0	1	0
AB'	0	0	1	0

$$F = \cancel{A'B'CD} + \cancel{A'BCD} + \cancel{ABCD} + \cancel{AB'CD}$$

Jadi $F = CD$

Akan sama hasilnya dengan cara pairs (pasangan), harus dihindarkan :

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	1	0
A'B	0	0	1	0
AB	0	0	1	0
AB'	0	0	1	0

$$F = \cancel{A'B'CD} + \cancel{A'BCD} + \cancel{ABCD} + \cancel{AB'CD}$$

Jadi $F = A'CD + ACD$

Persamaan di atas masih dapat disederhanakan menjadi :

$$F = CD (A' + A) = CD$$

3. OKTET (OCTETS)

Adalah kelompok yang terdiri dari **delapan** nilai angka 1 yang berdampingan. "Sebuah oktet selalu berarti penghapusan tiga buah variabel dan komponen-komponennya dari persamaan boole ybs".

Contoh :

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
AB'	1	1	1	1

$$F = ABC'D' + ABC'D + ABCD + AB'CD' + AB'C'D' + AB'C'D + AB'CD + AB'CD'$$

Jadi F = **A**

- Akan sama hasilnya dengan cara Kuad harus dihindarkan :

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
AB'	1	1	1	1

$$F = \cancel{ABC'D'} + \cancel{ABC'D} + \cancel{AB'C'D'} + \cancel{AB'C'D} + \cancel{ABCD} + \cancel{ABCD'} + \cancel{AB'CD} + \cancel{AB'CD'}$$

$$= \mathbf{AC'} + \mathbf{AC}$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi :

$$F = \mathbf{A(C' + C)}$$

Jadi F = **A**

- Akan sama hasilnya dengan cara Pasangan, harus dihindarkan :

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	0	0
AB	1	1	1	1
AB'	1	1	1	1

$$F = \cancel{ABC'D'} + \cancel{ABC'D} + \cancel{ABCD} + \cancel{ABCD'} + \cancel{AB'C'D'} + \cancel{AB'C'D} + \cancel{AB'CD} + \cancel{AB'CD'}$$

$$= \mathbf{ABC'} + \mathbf{ABC} + \mathbf{AB'C'} + \mathbf{AB'C}$$

Disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} F &= AB (C' + C) + AB (C' + C) \\ &= AB + AB' \end{aligned}$$

Masih dapat disederhanakan lagi menjadi :

$$F = A (B + B')$$

$$\text{Jadi } F = A$$

Kesimpulan :

„Dalam menyederhanakan persamaan boole, kita harus melakukan **identifikasi** mulai dengan melingkari oktet, Kuad atau pasangan angka dari masing-masing dapat **menghapuskan** tiga, dua atau satu variabel“.

Latihan :

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	1	1	1
A'B	0	0	0	1
AB	1	1	0	1
AB'	1	1	0	1

Jadi : $F = A'B'D + AC' + CD'$

Uraianya ?

Kelompok yang Bertumpang Tindih

Disini, diperbolehkan melingkari kelompok angka 1 lebih dari satu kali atau kelompok saling bertumpang tindih (overlapping).

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	1	0	0
AB	1	1	1	1
AB'	1	1	1	1

$$F = \underbrace{A'BC'D' + ABC'D' + ABC'D' + ABC'D}_{BC'D} + \underbrace{ABCD' + AB'C'D' + AB'C'D + AB'CD + ABCD'}_A$$

Jadi : $F = A + BC'D$

Hindari angka 1 yang **terisolasi** karena menuntut rangkaian logika yang lebih rumit (tidak dapat disederhanakan **atau** tidak ada variabel yang dihapuskan).

Contoh :

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	1	0	0
AB	1	1	1	1
AB'	1	1	1	1

→ terisolasi

$$F = \underbrace{A'BC'D' + ABC'D' + ABC'D' + ABCD}_{B'C'D} + \underbrace{ABCD' + AB'C'D' + AB'C'D + AB'CD + AB'CD'}_A$$

Jadi : $F = A + A'BC'D$

Penggulungan Peta :

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
AB'	0	0	0	0

$$F = \underbrace{A'BC'D' + ABC'D'}_{BC'D'} + \underbrace{A'BCD' + ABCD'}_{BCD'}$$

Karena persamaan bolle di atas dihindarkan, karena masih dapat disederhanakan, maka pengeompokan angka 1 menggunakan cara **penggulungan** yaitu dalam bentuk **Kuad** dan dalam peta sebagai berikut :

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	1	0	0	1
AB	1	0	0	1
AB'	0	0	0	0

$F = A'BC'D' + A'BCD' + ABC'D' + ABCD'$
Jadi $F = BD'$

Kelompok Kelebihan (Redundant)

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
AB'	0	0	1	0

$$F = A'BC'D + ABC'D + ABC'D + ABCD + ABCD + AB'CD$$

$$= BC'D + ABD + ACD$$

Disini terdapat kelompok angka 1 ditengah yang perlu diperiksa, ternyata tumpang tindih baik angka 1 disebelah kiri ataupun disebelah kanan disebut **pasangan Kelebihan** dan harus **dihapuskan** agar diperoleh peta yang baik sederhana, yaitu sebagai berikut :

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	1	0	0
AB	0	1	1	0
AB'	0	0	1	0

$F = A'BC'D' + A'BCD' + ABC'D' + ABCD'$
Jadi $F = BD'$

Prioritas Pengelompokan Bilangan

1. Oktet
2. Kuad
3. Pairs
4. Hindari output bilangan yang terisolasi
5. Hapus kelompok yang berlebihan

Catatan : Lebih banyak variabel yang dihilangkan, akan menghasilkan fungsi aljabar boole yang sederhana.

Contoh :
Langkah – 1

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	1	0
AB	1	1	1	1
AB'	0	1	1	1

Langkah - 2

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	1	0
AB	1	1	1	1
AB'	0	1	1	1

Langkah – 3

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	1	0
AB	1	1	1	1
AB'	0	1	1	1

Langkah - 4

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	1	0
AB	1	1	1	1
AB'	0	1	1	1

Langkah – 5

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	1	0
AB	1	1	1	1
AB'	0	1	1	1

F =

Gambar rangkaian logik :

Keadaan Tak Perduli (don't care)

Adalah dinyatakan dengan tanda x (tidak terjadi perubahan apapun pada keluaran, walaupun nilai masukan diubah) dan x dapat berupa nilai 0 atau 1.

Misalkan hasil proses fundamental sbb :

TABEL KEBENARAN

INPUT				OUTPUT
A	B	C	D	F
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	X
1	0	0	1	X
1	0	1	0	X
1	0	1	1	X
1	1	0	0	X
1	1	0	1	X
1	1	1	0	X
1	1	1	1	X

PETA KARNAUGH

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	1	0	1	0
A'B	1	1	1	0
AB	X	X	X	X
AB'	X	X	X	X

$$F(A,B,C,D) = \sum (0,3,4,5,7)$$

$$F(A,B,C,D) = \prod (1,2,6)$$

$$F = CD + C'D' + BD$$

Soal-soal Latihan :

1.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	1	1	1
A'B	0	0	0	1
AB	1	1	0	1
AB'	1	1	0	1

$$F(A,B,C,D) = \sum (\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$

2.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	0	0
A'B	0	0	1	0
AB	1	1	1	1
AB'	0	1	1	1

$$F(A,B,C,D) = \sum (\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$

3.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	1	1	0	0
A'B	1	1	0	1
AB	1	1	0	1
AB'	1	1	0	0

$$F(A,B,C,D) = \sum (\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$

4.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	1	1	0	1
A'B	1	1	0	1
AB	1	1	0	0
AB'	1	1	0	1

$$F(A,B,C,D) = \sum (\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$

5.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	1	0
A'B	1	1	1	0
AB	0	1	1	1
AB'	0	1	0	0

$$F(A,B,C,D) = \sum (\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$

6.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	1	1	1
A'B	0	0	0	1
AB	1	X	X	1
AB'	1	X	X	1

$$F(A,B,C,D) = \sum (\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$

7.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	1	1	1	1
A'B	1	1	1	1
AB	0	0	1	0
AB'	X	X	0	1

$$F(A,B,C,D) = \sum(\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$

8.

	C'D'	C'D	CD	CD'
A'B'	0	0	X	X
A'B	1	0	X	1
AB	1	1	X	1
AB'	0	0	X	0

$$F(A,B,C,D) = \sum(\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$

9.

	C+D	C+D'	C'+D'	C'+D
A+B	X	1	1	0
A+B'	1	X	0	0
A'+B'	0	1	X	0
A'+B	0	0	0	X

$$F(A,B,C,D) = \prod(\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$

10.

	C+D	C+D'	C'+D'	C'+D
A+B	0	X	1	X
A+B'	1	X	1	X
A'+B'	1	X	0	X
A'+B	0	X	0	X

$$F(A,B,C,D) = \prod(\dots\dots\dots)$$

$$F = \dots\dots\dots$$